

(17)

解: 在△ABC中, 由 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $\sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $A+B+C=\pi$,

所以 $\sin C = \sin(A+B) = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

因为 $\sin C < \sin B$, 所以 $C < B$, 可知 C 为锐角,

所以 $\cos C = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

因此 $\sin A = \sin(B+C)$
 $= \sin B \cos C + \cos B \sin C$
 $= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

可得 $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{c}{\frac{\sqrt{6}}{9}} = 2\sqrt{3}c$,

又 $ac = 2\sqrt{3}$, 所以 $c = 1$.

(18)

(I) 证法一:

连接 DG, CD , 设 $CD \cap GF = M$, 连接 MH .

在三棱台 $DEF-ABC$ 中,

$AB = 2DE$, G 为 AC 的中点,

可得 $DF \parallel GC, DF = GC$,

所以 四边形 $DFCG$ 为平行四边形.

则 M 为 CD 的中点, 又 H 为 BC 的中点,

所以 $HM \parallel BD$,

又 $HM \subset$ 平面 FGH , $BD \not\subset$ 平面 FGH ,

所以 $BD \parallel$ 平面 FGH .

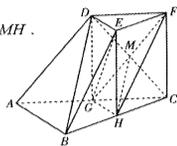
证法二:

在三棱台 $DEF-ABC$ 中,

由 $BC = 2EF$, H 为 BC 的中点,

可得 $BH \parallel EF, BH = EF$,

所以 四边形 $HBEF$ 为平行四边形,



— 114 —

可得 $BE \parallel HF$.

在△ABC中, G 为 AC 的中点, H 为 BC 的中点,

所以 $GH \parallel AB$.

又 $GH \cap HF = H$,

所以 平面 $FGH \parallel$ 平面 $ABED$.

因为 $BD \subset$ 平面 $ABED$,

所以 $BD \parallel$ 平面 FGH .

(II) 证明: 连接 HE .

因为 G, H 分别为 AC, BC 的中点,

所以 $GH \parallel AB$.

由 $AB \perp BC$, 得 $GH \perp BC$.

又 H 为 BC 的中点,

所以 $EF \parallel HC, EF = HC$,

因此 四边形 $EFCH$ 是平行四边形.

所以 $CF \parallel HE$,

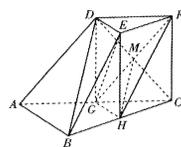
又 $CF \perp BC$, 所以 $HE \perp BC$.

又 $HE, GH \subset$ 平面 EGH , $HE \cap GH = H$,

所以 $BC \perp$ 平面 EGH .

又 $BC \subset$ 平面 BCD ,

所以 平面 $BCD \perp$ 平面 EGH .



(19)

解: (I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

令 $n=1$, 得 $\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{3}$,

所以 $a_1 a_2 = 3$.

令 $n=2$, 得 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{5}$,

所以 $a_2 a_3 = 15$.

解得 $a_1 = 1, d = 2$,

所以 $a_n = 2n - 1$.

— 115 —

(II) 由 (I) 知 $b_n = 2n \cdot 2^{2n-1} = n \cdot 4^n$,

所以 $T_n = 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^2 + \dots + n \cdot 4^n$,

所以 $4T_n = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 + \dots + n \cdot 4^{n+1}$,

两式相减, 得 $-3T_n = 4^1 + 4^2 + \dots + 4^n - n \cdot 4^{n+1}$

$$= \frac{4(1-4^n)}{1-4} - n \cdot 4^{n+1}$$

$$= \frac{1-3n}{3} \times 4^{n+1} - \frac{4}{3}$$

所以 $T_n = \frac{3n-1}{9} \times 4^{n+1} + \frac{4}{9} = \frac{4+(3n-1)4^{n+1}}{9}$.

(20)

解: (I) 由题意知, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 2,

所以 $f'(1) = 2$,

又 $f'(x) = \ln x + \frac{a}{x} + 1$,

所以 $a = 1$.

(II) $k=1$ 时, 方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在唯一的根.

设 $h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)\ln x - \frac{x^2}{e^x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) < 0$.

又 $h(2) = 3\ln 2 - \frac{4}{e^2} = \ln 8 - \frac{4}{e^2} > 1 - 1 = 0$,

所以 存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $h(x_0) = 0$.

因为 $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 + \frac{x(x-2)}{e^x}$,

所以 当 $x \in (1, 2)$ 时, $h'(x) > 1 - \frac{1}{e} > 0$,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x)$ 单调递增.

所以 $k=1$ 时, 方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内存在唯一的根.

(III) 由 (II) 知 方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在唯一的根 x_0 ,

且 $x \in (0, x_0)$ 时, $f(x) < g(x)$,

$x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f(x) > g(x)$,

所以 $m(x) = \begin{cases} (x+1)\ln x, & x \in (0, x_0], \\ \frac{x^2}{e^x}, & x \in (x_0, +\infty). \end{cases}$

— 116 —

当 $x \in (0, x_0)$ 时, 若 $x \in (0, 1]$, $m(x) \leq 0$;

若 $x \in (1, x_0)$, 由 $m'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 > 0$,

可知 $0 < m(x) \leq m(x_0)$;

故 $m(x) \leq m(x_0)$.

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 由 $m'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$,

可得 $x \in (x_0, 2)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增;

$x \in (2, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减;

可知 $m(x) \leq m(2) = \frac{4}{e^2}$, 且 $m(x_0) < m(2)$.

综上所述 函数 $m(x)$ 的最大值为 $\frac{4}{e^2}$.

(21)

解: (I) 由题意知 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$,

又 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 1$.

所以 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 由 (I) 知 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(i) 设 $P(x_0, y_0)$, $\frac{|OQ|}{|OP|} = \lambda$,

由题意知 $Q(-\lambda x_0, -\lambda y_0)$.

因为 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$,

又 $\frac{(-\lambda x_0)^2}{16} + \frac{(-\lambda y_0)^2}{4} = 1$, 即 $\frac{\lambda^2}{4} (\frac{x_0^2}{4} + y_0^2) = 1$,

所以 $\lambda = 2$, 即 $\frac{|OQ|}{|OP|} = 2$.

(ii) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

将 $y = kx + m$ 代入椭圆 E 的方程,

可得 $(1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 16 = 0$,

由 $\Delta > 0$, 可得 $m^2 < 4 + 16k^2$. ①

— 117 —



山东大学

SHANDONG UNIVERSITY

入学选拔考试

山大审批项目 入学即签订协议 食宿学在山大

(第9届国际教育项目2007-2015)

西班牙公立大学入学考试

(山东大学审批号: 20140501)

招生院校: 马德里康普顿斯大学、马德里理工大学、马德里自治大学、萨拉戈萨大学、萨拉曼卡大学、阿尔卡拉大学等西班牙所有公立大学

报考条件: 应往届高中毕业生

考试时间: 6月14日

考试科目: 西班牙语校方面试

申请世界500强公立名校; 西班牙公立大学语言和专业的双录取项目; 39国官方语言, 稀缺语种, 就业前景广阔; 留学成本低, 每年学费约1万人民币。

韩国名校本科班入学考试

(山东大学审批号: 20140502)

招生院校: 高丽大学、延世大学、成均馆大学、汉阳大学、庆熙大学、西江大学、庆北大学、忠南国立大学等韩国所有大学

报考条件: 高二在读、应往届高中毕业生、大专二年级及毕业生

考试时间: 6月21日

考试科目: 韩国教授面试

山东大学历史最悠久的韩国语项目; 8年办学经验, 签证有保障; 韩国名校百余专业可供选择; 高端师资, 中韩大学教授联合执教。

德国公立大学入学考试

(山东大学审批号: 20140801)

招生院校: 亚琛应用科学大学、杜伊斯堡埃森大学、莱茵瓦尔应用科学大学、西南法伦应用科学大学

报考条件: 高二在读生、应往届高中毕业生

考试时间: 7月1日(6月28日考前辅导)

考试科目: 笔试(英语、数学)、面试(英语)

免学费; 德国大学入学考试山东考点; 9年办学, 签证有保障; 通过考试即可获得德国大学正式录取通知书; 德国政府特批项目, 无需经济担保, 无需面签; 德语零基础, 无需德福考试。

公告

国际教育项目将于6月13日、6月14日、6月21日在山大中心校区举行德国、西班牙、韩国项目招生说明会, 详情关注项目网站!

报名电话: 0531-88363386 88363913
88362488 88365672

网址: www.sdlx.sdu.edu.cn



地址: 济南市山大南路27号山东大学中心校区区新楼A座1113室