（17）

解： 在$\triangle ABC$中，由$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

因为 $\sin C<\sin B$，所以 $C<B$，可知 C为锐角，

所以 $\cos C=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

因此 $\sin A=\sin(B+C)$

$=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{9}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{9}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

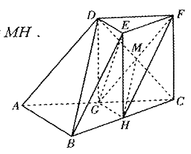
由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

可得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}c}{\frac{\sqrt{6}}{9}}=2\sqrt{3}c$，

又 $ac=2\sqrt{3}$，所以 $c=1$.

（18）

（Ⅰ）证法一：



连接DG，CD，设$CD\cap GF=M$，连接MH.

在三棱台$DEF-ABC$中，

$AB=2DE$，G为AC的中点，

可得 $DF\parallel GC, DF=GC$，

所以 四边形$DFCG$为平行四边形.

则 M为CD的中点，又 H为BC的中点，

所以 $HM\parallel BD$，

又 $HM\subset$平面FGH，$BD\not\subset$平面FGH，

所以 $BD\parallel$平面FGH.

证法二：

在三棱台$DEF-ABC$中，

由 $BC=2EF$，H为BC的中点，

可得 $BH\parallel EF, BH=EF$，

所以 四边形$HBEF$为平行四边形，

可得 $BE\parallel HF$.

在$\triangle ABC$中，G为AC的中点，H为BC的中点，

所以 $GH\parallel AB$.

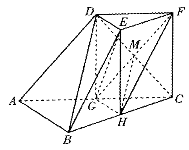
又 $GH\cap HF=H$，

所以 平面$FGH\parallel$平面$ABED$.

因为 $BD\subset$平面$ABED$，

所以 $BD\parallel$平面FGH.

（Ⅱ）证明：连接HE.



因为 G,H分别为AC,BC的中点，

所以 $GH\parallel AB$.

由 $AB\perp BC$，得 $GH\perp BC$.

又 H为BC的中点，

所以 $EF\parallel HC$，$EF=HC$，

因此 四边形$EFCH$是平行四边形.

所以 $CF\parallel HE$，

又 $CF\perp BC$，所以 $HE\perp BC$.

又 $HE, GH\subset$平面EGH，$HE\cap GH=H$，

所以 $BC\perp$平面EGH.

又 $BC\subset$平面BCD，

所以 平面$BCD\perp$平面EGH.

（19）

解：（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的公差为d.

令$n=1$，得 $\dfrac{1}{a_1a_2}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $a_1a_2=3$.

令$n=2$，得 $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{2}{5}$，

所以 $a_2a_3=15$.

解得 $a_1=1, d=2$，

所以 $a_n=2n-1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $b_n=2n\cdot 2^{2n-1}=n\cdot 4^n$，

所以 $T_n=1\cdot 4^1+2\cdot 4^2+\cdots+n\cdot 4^n$，

所以 $4T_n=1\cdot 4^2+2\cdot 4^3+\cdots+n\cdot 4^{n+1}$，

两式相减，得 $-3T_n=4^1+4^2+\cdots+4^n-n\cdot 4^{n+1}$

$=\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 4^{n+1}$

$=\dfrac{1-3n}{3}\times 4^{n+1}-\dfrac{4}{3}$.

所以 $T_n=\dfrac{3n-1}{9}\times 4^{n+1}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{4+(3n-1)4^{n+1}}{9}$.

（20）

解：（Ⅰ）由题意知，曲线$y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线斜率为2，

所以 $f'(1)=2$，

又 $f'(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}+1$，

所以 $a=1$.

（Ⅱ）$k=1$时，方程$f(x)=g(x)$在$(1, 2)$内存在唯一的根.

设$h(x)=f(x)-g(x)=(x+1)\ln x-\dfrac{x^2}{e^x}$，

当$x\in(0, 1]$时，$h(x)<0$.

又 $h(2)=3\ln 2-\dfrac{4}{e^2}=\ln 8-\dfrac{4}{e^2}>1-1=0$，

所以 存在$x_0\in(1,2)$，使得 $h(x_0)=0$.

因为 $h'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{x(x-2)}{e^x}$，

所以 当$x\in(1,2)$时，$h'(x)>1-\dfrac{1}{e}>0$，

当$x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$，

所以 当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)$单调递增.

所以 $k=1$时，方程$f(x)=g(x)$在$(k,k+1)$内存在唯一的根.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知 方程$f(x)=g(x)$在$(1, 2)$内存在唯一的根x_0，

且 $x\in(0, x_0)$时，$f(x)<g(x)$，

$x\in(x_0,+\infty)$时，$f(x)>g(x)$，

所以 $m(x)=\begin{cases}(x+1)\ln x, & x\in(0, x_0],\\ \dfrac{x^2}{e^x}, & x\in(x_0,+\infty).\end{cases}$

当$x\in(0, x_0)$时，若$x\in(0, 1]$，$m(x)\leqslant 0$；

若$x\in(1, x_0)$，由 $m'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1>0$，

可知 $0<m(x)\leqslant m(x_0)$；

故 $m(x)\leqslant m(x_0)$.

当$x\in(x_0,+\infty)$时，由$m'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$，

可得 $x\in(x_0, 2)$时，$m'(x)>0$，$m(x)$单调递增；

$x\in(2, +\infty)$时，$m'(x)<0$，$m(x)$单调递减；

可知 $m(x)\leqslant m(2)=\dfrac{4}{e^2}$，且 $m(x_0)<m(2)$.

综上可得 函数$m(x)$的最大值为$\dfrac{4}{e^2}$.

（21）

解：（Ⅰ）由题意知 $\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1$，

又 $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a^2=4$，$b^2=1$.

所以 椭圆C的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 椭圆E的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（ⅰ）设$P(x_0, y_0)$，$\dfrac{|OQ|}{|OP|}=\lambda$，

由题意知 $Q(-\lambda x_0, -\lambda y_0)$.

因为 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+y_0^2=1$，

又 $\dfrac{(-\lambda x_0)^2}{16}+\dfrac{(-\lambda y_0)^2}{4}=1$，即 $\dfrac{\lambda^2}{4}(\dfrac{{x_0}^2}{4}+y_0^2)=1$，

所以 $\lambda=2$，即 $\dfrac{|OQ|}{|OP|}=2$.

（ⅱ）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

将$y=kx+m$代入椭圆E的方程，

可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$，

由 $\Delta>0$，可得 $m^2<4+16k^2$. ①