则有 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-16}{1+4k^2}$.

所以 $|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{16k^2+4-m^2}}{1+4k^2}$.

因为 直线 $y=kx+m$ 与 y 轴交点的坐标为 $(0,m)$，

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|$

$$=\frac{2\sqrt{16k^2+4-m^2}\,|m|}{1+4k^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{(16k^2+4-m^2)m^2}}{1+4k^2}$$

$$=2\sqrt{(4-\frac{m^2}{1+4k^2})\frac{m^2}{1+4k^2}}\ .$$

设 $\frac{m^2}{1+4k^2}=t$.

将 $y=kx+m$ 代入椭圆 C 的方程，

可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

由 $\Delta\geqslant 0$，可得 $m^2\leqslant 1+4k^2$. ②

由①②可知 $0<t\leqslant 1$，

因此 $S=2\sqrt{(4-t)t}=2\sqrt{-t^2+4t}$.

故 $S\leqslant 2\sqrt{3}$，

当且仅当 $t=1$，即 $m^2=1+4k^2$ 时取得最大值 $2\sqrt{3}$.

由（ i ）知，$\triangle ABQ$ 面积为 $3S$，

所以 $\triangle ABQ$ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}$.

绝密★启用前

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

理科数学试题参考答案

一、选择题

（1）C （2）A （3）B （4）D （5）A

（6）B （7）C （8）B （9）D （10）C

二、填空题

（11）4^{n-1} （12）1 （13）$\frac{11}{6}$ （14）$-\frac{3}{2}$ （15）$\frac{3}{2}$

三、解答题

（16）

解：（Ⅰ）由题意知 $f(x)=\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}$

$$=\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1-\sin 2x}{2}$$

$$=\sin 2x-\frac{1}{2}.$$

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$，可得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$；

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$，可得 $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$；

单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{3\pi}{4}+k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$.

（Ⅱ）由 $f(\frac{A}{2})=\sin A-\frac{1}{2}=0$，得 $\sin A=\frac{1}{2}$，

由题意知 A 为锐角，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

可得 $1+\sqrt{3}bc=b^2+c^2\geqslant 2bc$，

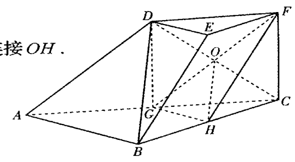
即 $bc\leqslant 2+\sqrt{3}$，且当 $b=c$ 时等号成立.

因此 $\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

（17）

（Ⅰ）证法一：



连接 DG，CD，设 $CD\cap GF=O$，连接 OH.

在三棱台 $DEF-ABC$ 中，

$AB=2DE$，G 为 AC 的中点，

可得 $DF\,/\!/\,GC,DF=GC$，

所以 四边形 $DFCG$ 为平行四边形.

则 O 为 CD 的中点，

又 H 为 BC 的中点，

所以 $OH\,/\!/\,BD$，

又 $OH\subset$ 平面 FGH，$BD\not\subset$ 平面 FGH，

所以 $BD\,/\!/$ 平面 FGH.

证法二：

在三棱台 $DEF-ABC$ 中，

由 $BC=2EF$，H 为 BC 的中点，

可得 $BH\,/\!/\,EF,BH=EF$，

所以 四边形 $BHFE$ 为平行四边形，

可得 $BE\,/\!/\,HF$.

在 $\triangle ABC$ 中，G 为 AC 的中点，H 为 BC 的中点，

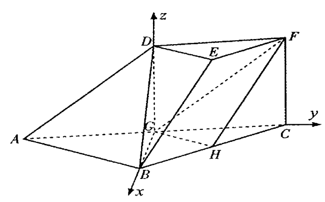
所以 $GH\,/\!/\,AB$.

又 $GH\cap HF=H$，所以 平面 $FGH\,/\!/$ 平面 $ABED$.

因为 $BD\subset$ 平面 $ABED$，

所以 $BD\,/\!/$ 平面 FGH.

（Ⅱ）解法一：



设 $AB=2$，则 $CF=1$.

在三棱台 $DEF-ABC$ 中，

G 为 AC 的中点，

由 $DF=\frac{1}{2}AC=GC$，

可得 四边形 $DGCF$ 为平行四边形，

因此 $DG\,/\!/\,FC$.

又 $FC\perp$ 平面 ABC，

所以 $DG\perp$ 平面 ABC.

在 $\triangle ABC$ 中，由 $AB\perp BC$，$\angle BAC=45^\circ$，G 是 AC 中点，

所以 $AB=BC$，$GB\perp GC$，

因此 GB,GC,GD 两两垂直.

以 G 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $G-xyz$.

所以 $G(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$D(0,0,1)$.

可得 $H(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，$F(0,\sqrt{2},1)$，

故 $\overrightarrow{GH}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，$\overrightarrow{GF}=(0,\sqrt{2},1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 FGH 的一个法向量，则

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GH}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GF}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x+y=0,\\ \sqrt{2}y+z=0.\end{cases}$

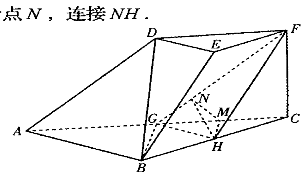
可得 平面 FGH 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,\sqrt{2})$.

因为 $\overrightarrow{GB}$ 是平面 $ACFD$ 的一个法向量，$\overrightarrow{GB}=(\sqrt{2},0,0)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{GB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{GB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{GB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

所以 平面 FGH 与平面 $ACFD$ 所成角（锐角）的大小为 60°.

解法二：



作 $HM\perp AC$ 于点 M，作 $MN\perp GF$ 于点 N，连接 NH.

由 $FC\perp$ 平面 ABC，得 $HM\perp FC$，

又 $FC\cap AC=C$，

所以 $HM\perp$ 平面 $ACFD$.

因此 $GF\perp NH$，

所以 $\angle MNH$ 即为所求的角.