10．已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点．若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11．关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

① $f(x)$ 是偶函数　　② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 单调递增

③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有4个零点　　④ $f(x)$ 的最大值为2

其中所有正确结论的编号是

A．①②④　　B．②④　　C．①④　　D．①③

12．已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90^\circ$，则球 O 的体积为

A．$8\sqrt{6}\pi$　　B．$4\sqrt{6}\pi$　　C．$2\sqrt{6}\pi$　　D．$\sqrt{6}\pi$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________．

14．记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则 $S_5=$________

15．甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为0.6，客场取胜的概率为0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以4:1获胜的概率是________．

16．已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点．若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为________

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17．（12分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$．

（1）求 A；

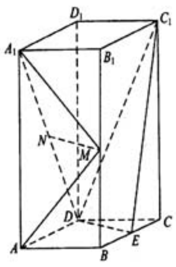
（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$

18．（12分）

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点．

（1）证明：$MN\parallel$ 平面 C_1DE；

（2）求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值．



19．（12分）

已知抛物线 C: $y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A，B，与 x 轴的交点为 P．

（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$．

20．（12分）

已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

（1）$f'(x)$ 在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

（2）$f(x)$ 有且仅有2个零点．

21．（12分）

为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分．甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β，一轮试验中甲药的得分记为 X．

（1）求 X 的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$，$p_8=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,7)$，其中 $a=P(X=-1)$，$b=P(X=0)$，$c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$．

（i）证明：$\{p_{i+1}-p_i\}\ (i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列；

（ii）求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性．

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ y=\frac{4t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$．

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值．

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

已知 a，b，c 为正数，且满足 $abc=1$．证明：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$．

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案

一、选择题

1．C　2．C　3．B　4．B　5．D　6．A

7．B　8．A　9．A　10．B　11．C　12．D

二、填空题

13．$y=3x$　14．$\frac{121}{3}$　15．0.18　16．2

三、解答题

17．解：

（1）由已知得 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，故由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$．

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$．

因为 $0^\circ<A<180^\circ$，所以 $A=60^\circ$．

（2）由（1）知 $B=120^\circ-C$，由题设及正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A+\sin(120^\circ-C)=2\sin C$，

即 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$，可得 $\cos(C+60^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

由于 $0^\circ<C<120^\circ$，所以 $\sin(C+60^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$\begin{aligned}\sin C&=\sin(C+60^\circ-60^\circ)\\&=\sin(C+60^\circ)\cos60^\circ-\cos(C+60^\circ)\sin60^\circ\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

18．解：

（1）连结 B_1C，ME．因为 M，E 分别为 BB_1，BC 的中点，所以 $ME\parallel B_1C$，且 $ME=\frac{1}{2}B_1C$．又因为 N 为 A_1D 的中点，所以 $ND=\frac{1}{2}A_1D$．

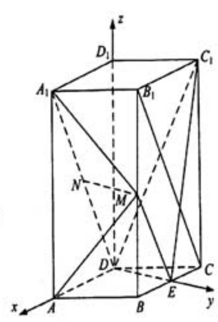
由题设知 $A_1B_1\underline{\parallel}DC$，可得 $B_1C\underline{\parallel}A_1D$，故 $ME\underline{\parallel}ND$，因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形，$MN\parallel ED$．又 $MN\not\subset$ 平面 EDC_1，所以 $MN\parallel$ 平面 C_1DE．

（2）由已知可得 $DE\perp DA$．以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则

$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,4)$，$M(1,\sqrt{3},2)$，$N(1,0,2)$，$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$，

$\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1N}=(-1,0,-2)$，

$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0)$．



设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 A_1MA 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0,\\ -4z=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$．

设 $\boldsymbol{n}=(p,q,r)$ 为平面 A_1MN 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-\sqrt{3}q=0,\\ -p-2r=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$．

于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，所以二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$．

19．解：

设直线 l: $y=\frac{3}{2}x+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

（1）由题设得 $F(\frac{3}{4},0)$，故 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+\frac{3}{2}$，由题设可得 $x_1+x_2=\frac{5}{2}$．

由 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+t,\\ y^2=3x\end{cases}$ 可得 $9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$，则 $x_1+x_2=-\frac{12(t-1)}{9}$．

从而 $-\frac{12(t-1)}{9}=\frac{5}{2}$，得 $t=-\frac{7}{8}$．

所以 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$．

（2）由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ 可得 $y_1=-3y_2$．

由 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+t,\\ y^2=3x\end{cases}$ 可得 $y^2-2y+2t=0$．

所以 $y_1+y_2=2$．从而 $-3y_2+y_2=2$，故 $y_2=-1$，$y_1=3$．

代入 C 的方程得 $x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$．

故 $|AB|=\frac{4\sqrt{13}}{3}$．

20．解：

（1）设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$．

当 $x\in(-1,\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)$ 单调递减，而 $g'(0)>0$，$g'(\frac{\pi}{2})<0$，可得 $g'(x)$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 有唯一零点，设为 α．则当 $x\in(-1,\alpha)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)<0$．

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增，在 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，故 $g(x)$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点，即 $f'(x)$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点．

（2）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$．

（i）当 $x\in(-1,0]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减．又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点．

（ii）当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增，在 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，而 $f'(0)=0$，$f'(\frac{\pi}{2})<0$，所以存在 $\beta\in(\alpha,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\beta,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增，在 $(\beta,\frac{\pi}{2})$ 单调递减．

又 $f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>0$，所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f(x)>0$．从而，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 没有零点．