

10. 已知椭圆C的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与C交于A, B两点. 若 $|AF_2|=2|BF_2|$, $|AB|=|BF_1|$, 则C的方程为
- A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$
11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论:
- ① $f(x)$ 是偶函数 ② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增
- ③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有4个零点 ④ $f(x)$ 的最大值为2
- 其中所有正确结论的编号是
- A. ①②④ B. ②④ C. ①④ D. ①③
12. 已知三棱锥P-ABC的四个顶点在球O的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形, E, F分别是PA, AB的中点, $\angle CEF=90^\circ$, 则球O的体积为
- A. $8\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$ D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

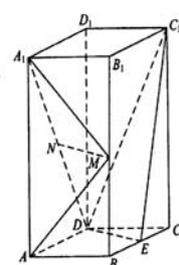
13. 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点(0,0)处的切线方程为_____.
14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前n项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=a_4$, 则 $S_5=$ _____.
15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制(当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为0.6, 客场取胜的概率为0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以4:1获胜的概率是_____.
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$)的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与C的两条渐近线分别交于A, B两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_2B} \cdot \overrightarrow{F_2A}=0$, 则C的离心率为_____.

三、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题: 共60分.

17. (12分)
- $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c. 设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$.
- (1) 求A;
- (2) 若 $\sqrt{2}a+b=2c$, 求 $\sin C$.

18. (12分)
- 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.
- (1) 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;
- (2) 求二面角 $A-MN-N$ 的正弦值.



19. (12分)
- 已知抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点为F, 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线l与C的交点为A, B, 与x轴的交点为P.
- (1) 若 $|AF|+|BF|=4$, 求l的方程;
- (2) 若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$, 求 $|AB|$.

20. (12分)
- 已知函数 $f(x)=\sin x - \ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:
- (1) $f'(x)$ 在区间 $(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;
- (2) $f(x)$ 有且仅有2个零点.

21. (12分)
- 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分, 乙药得-1分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分, 甲药得-1分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得0分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β , 一轮试验中甲药的得分记为X.
- (1) 求X的分布列;
- (2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分, p_i ($i=0,1,\dots,8$)表示“甲药的累计得分为i时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0=0$, $p_8=1$, $p_i = \alpha p_{i-1} + \beta p_{i+1} + \alpha\beta p_i$ ($i=1,2,\dots,7$), 其中 $a=P(X=-1)$, $b=P(X=0)$, $c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5$, $\beta=0.8$.
- (i) 证明: $\{p_i - p_j\}$ ($i=0,1,2,\dots,7$)为等比数列;
- (ii) 求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

(二)选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)
- 在直角坐标系xOy中, 曲线C的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点O为极点, x轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线l的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$.

- (1) 求C和l的直角坐标方程;
- (2) 求C上的点到l距离的最小值.

23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)

已知a, b, c为正数, 且满足 $abc=1$. 证明:

- (1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;
- (2) $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \geq 24$.

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案

一、选择题

1. C 2. C 3. B 4. B 5. D 6. A
7. B 8. A 9. A 10. B 11. C 12. D

二、填空题

13. $y=3x$ 14. $\frac{121}{3}$ 15. 0.18 16. 2

三、解答题

17. 解:
- (1) 由已知得 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$. 故由正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$. 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$. 因为 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以 $A = 60^\circ$.
- (2) 由(1)知 $B = 120^\circ - C$, 由题设及正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A + \sin(120^\circ - C) = 2\sin C$, 即 $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C + \frac{1}{2}\sin C = 2\sin C$, 可得 $\cos(C+60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 由于 $0^\circ < C < 120^\circ$, 所以 $\sin(C+60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故
- $$\begin{aligned} \sin C &= \sin(C+60^\circ-60^\circ) \\ &= \sin(C+60^\circ)\cos 60^\circ - \cos(C+60^\circ)\sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

18. 解:

- (1) 连结 B_1C, ME . 因为M, E分别为 BB_1, BC 的中点, 所以 $ME \parallel B_1C$, 且 $ME = \frac{1}{2}B_1C$. 又因为N为 A_1D 的中点, 所以 $ND = \frac{1}{2}A_1D$. 由题设知 $A_1B_1 \parallel DC$, 可得 $B_1C \parallel A_1D$, 故 $ME \parallel ND$, 因此四边形MNDE为平行四边形, $MN \parallel ED$. 又 $MN \subset$ 平面 EDC , 所以 $MN \parallel$ 平面 C_1DE .

- (2) 由已知可得 $DE \perp DA$. 以D为坐标原点, \overrightarrow{DA} 的方向为x轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系D-xyz, 则

$$A(2,0,0), A_1(2,0,4), M(1,\sqrt{3},2), N(1,0,2), \overrightarrow{AA_1}=(0,0,4),$$

$$\overrightarrow{AM}=(-1,\sqrt{3},-2), \overrightarrow{AN}=(-1,0,-2),$$

$$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0).$$

设 $m=(x,y,z)$ 为平面 A_1MA 的法向量, 则

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0. \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} -x + \sqrt{3}y - 2z = 0, \\ -4z = 0. \end{cases} \text{可取} m = (\sqrt{3}, 1, 0).$$

设 $n=(p,q,r)$ 为平面 A_1MN 的法向量, 则

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AN} = 0. \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} -\sqrt{3}q = 0, \\ -p - 2r = 0. \end{cases} \text{可取} n = (2, 0, -1).$$

于是 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 所以二面角 $A-MN-N$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

19. 解:

设直线 $l: y = \frac{3}{2}x + t$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

- (1) 由题设得 $F(\frac{3}{4}, 0)$, 故 $|AF|+|BF| = x_1 + x_2 + \frac{3}{2}$, 由题设可得 $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$.

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + t, \\ y^2 = 3x \end{cases} \text{可得} 9x^2 + 12(t-1)x + 4t^2 = 0, \text{则} x_1 + x_2 = \frac{12(t-1)}{9}.$$

$$\text{从而} \frac{12(t-1)}{9} = \frac{5}{2}, \text{得} t = \frac{7}{8}.$$

所以l的方程为 $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{8}$.

- (2) 由 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ 可得 $y_1 = -3y_2$.

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + t, \\ y^2 = 3x \end{cases} \text{可得} y^2 - 2y + 2t = 0.$$

所以 $y_1 + y_2 = 2$. 从而 $-3y_2 + y_2 = 2$, 故 $y_2 = -1$, $y_1 = 3$.

代入C的方程得 $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{故} |AB| = \frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

20. 解:

- (1) 设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}$, $g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x \in (-1, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x)$ 单调递减, 而 $g'(0) > 0$, $g'(\frac{\pi}{2}) < 0$, 可得 $g(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 有唯一零点, 设为 a . 则当 $x \in (-1, a)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (a, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) < 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1, a)$ 单调递增, 在 $(a, \frac{\pi}{2})$ 单调递减, 故 $g(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点, 即 $f(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点.

- (2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(i) 当 $x \in (-1, 0]$ 时, 由(1)知, $f'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递增, 而 $f'(0) = 0$, 所以当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减. 又 $f(0) = 0$, 从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 的唯一零点.

- (ii) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 由(1)知, $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增, 在 $(a, \frac{\pi}{2})$ 单调递减,

而 $f'(0) = 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) < 0$, 所以存在 $\beta \in (a, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\beta) = 0$, 且当 $x \in (0, \beta)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\beta, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $(0, \beta)$ 单调递增, 在 $(\beta, \frac{\pi}{2})$ 单调递减.

又 $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \ln(1 + \frac{\pi}{2}) > 0$, 所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) > 0$. 从而, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 没有零点.



东营职业学院



东营职业学院是2001年7月经山东省人民政府批准、东营市人民政府举办的公办全日制普通高等院校, 是国家骨干高等职业院校、山东省示范性高等职业院校、山东省优质高等职业院校建设工程立项建设单位。学校占地面积1902亩, 建筑面积43.02万平方米, 教学仪器设备总值1.51亿元, 全日制在校生近16000人, 成人学历在籍学生4800余人。现有教职工855人, 建有国家级教学团队1个、省级教学团队10个、省级黄大年式教师团队1个。

学校设石油与化学工程、石油装备与机电工程、建筑与环境

工程、会计、经济贸易与管理、电子信息与传媒、生物与生态工程、教师教育等8个二级学院及校企合作混合所有制航空学院1个, 开设与地方经济社会发展密切相关的石油化工技术、计算机网络技术、学前教育等55个招生专业, 招生范围覆盖全国18个省区。建设教育部产学合作协同育人项目1个, 成为教育部“AI+智慧学习”共建人工智能学院试点院校, 工业和信息化部“国家信息技术紧缺人才培养工程”动漫游戏人才培养基地, ARM(中国)嵌入式人工智能应用技术示范基地, “锐捷-中锐”全国网络技能训练基地。

学校不断加强内涵建设, 办学水平和综合实力不断提升。学校是“全国职业核心能力培养优秀单位”“全国高职创新创业教育工作先进单位”“全国高等职业院校服务贡献50强”“2017年高等职业院校教学资源50强”、国家职业教育专业教学资源库备选项目主持单位, “2018年度全国创新创业典型经验高校”, 是山东省“教育系统先进集体”“高等学校教学管理先进单位”“省级文明单位”“德育工作优秀高校”“依法治校示范校”。近五年学生技能大赛获得省级以上奖项99项, 其中国赛工业分析检验、化工仪表自动化、计算

机网络应用等赛项中获一等奖6项, 二等奖24项, 三等奖4项。累计有15名学生在在校期间获得“东营市技术能手”称号, 11名学生被中国工程物理研究院录用。学校先后被评为省高职高专人才培养工作优秀高校、毕业生就业工作优秀高校、大学生创业教育示范院校。

学校不断拓宽在校生提升学历层次渠道。石油化工技术、计算机网络技术、工程造价专

业分别与烟台大学、曲阜师范大学、临沂大学开展“3+2”对口专本贯通分段培养, 2019年分别列理科计划80人、80人、40人。提供各类教育教学资源支持学生专升本提升学历层次, 专升本考取率居同类院校前列。实施双证书自学考试校内套读和跨专业培养, 多途径开展网络函授教育, 为学生获取本科学历, 提升就业综合竞争力提供了极大便利。

通讯地址: 山东省东营市府前大街129号 邮政编码: 257091
联系电话: 0546-8060069, 8060559, 8060063, 8063218
学校网址: www.dyxy.edu.cn 招生网址: zs.dyxy.edu.cn