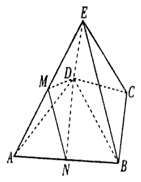
(Ⅱ) 证法一:



取 AB 的中点 N，连接 DM，DN，MN，

因为 M 是 AE 的中点，

所以 $MN \parallel BE$.

又 $MN \not\subset$ 平面 BEC，$BE \subset$ 平面 BEC，

所以 $MN \parallel$ 平面 BEC.

又因为 $\triangle ABD$ 为正三角形，

所以 $\angle BDN = 30^\circ$，

又 $CB = CD$，$\angle BCD = 120^\circ$，

因此 $\angle CBD = 30^\circ$，

所以 $DN \parallel BC$.

又 $DN \not\subset$ 平面 BEC，$BC \subset$ 平面 BEC，

所以 $DN \parallel$ 平面 BEC.

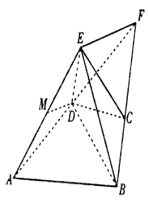
又 $MN \cap DN = N$，

故 平面 $DMN \parallel$ 平面 BEC，

又 $DM \subset$ 平面 DMN，

所以 $DM \parallel$ 平面 BEC.

证法二:



延长 AD, BC 交于点 F，连接 EF.

因为 $CB = CD$，$\angle BCD = 120^\circ$，

所以 $\angle CBD = 30^\circ$.

因为 $\triangle ABD$ 为正三角形，

所以 $\angle BAD = 60^\circ$，$\angle ABC = 90^\circ$，

因此 $\angle AFB = 30^\circ$，

所以 $AB = \frac{1}{2} AF$.

又 $AB = AD$，

所以 D 为线段 AF 的中点.

连接 DM，由点 M 是线段 AE 的中点，

因此 $DM \parallel EF$.

又 $DM \not\subset$ 平面 BEC，$EF \subset$ 平面 BEC，

所以 $DM \parallel$ 平面 BEC.

(20)

解:(Ⅰ) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 T_n.

由 $T_5 = 105,\ a_{10} = 2a_5$，

得到 $\begin{cases} 5a_1 + \frac{5\times(5-1)}{2} d = 105 \\ a_1 + 9d = 2(a_1 + 4d) \end{cases}$

解得 $a_1 = 7,\ d = 7$.

因此 $a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + 7(n-1) = 7n\ (n \in \mathbf{N}^*)$.

(Ⅱ) 对 $m \in \mathbf{N}^*$，若 $a_n = 7n \leqslant 7^{2m}$，则 $n \leqslant 7^{2m-1}$.

因此 $b_m = 7^{2m-1}$，

所以 数列 $\{b_m\}$ 是首项为 7 公比为 49 的等比数列，

故 $S_m = \frac{b_1(1-q^m)}{1-q} = \frac{7\times(1-49^m)}{1-49} = \frac{7\times(7^{2m}-1)}{48} = \frac{7^{2m+1}-7}{48}$.

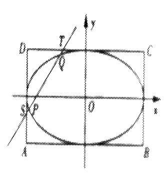
(21)

解:(Ⅰ) 设椭圆 M 的半焦距为 c，由题意知 $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4ab = 8 \end{cases}$

所以 $a = 2, b = 1$.

因此 椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(Ⅱ) 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ 整理得



$5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$，

由 $\Delta = 64m^2 - 80(m^2-1) = 80 - 16m^2 > 0$，

得 $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$.

设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，

则 $x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}$，$x_1 x_2 = \frac{4(m^2-1)}{5}$，

所以 $|PQ| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

$= \sqrt{2[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]}$

$= \frac{4}{5}\sqrt{2(5-m^2)}\quad (-\sqrt{5} < m < \sqrt{5})$.

线段 CD 的方程为 $y = 1\,(-2 \leqslant x \leqslant 2)$，线段 AD 的方程为 $x = -2\,(-1 \leqslant y \leqslant 1)$.

(1) 不妨设点 S 在 AD 边上，T 在 CD 边上，可知 $1 \leqslant m < \sqrt{5}$，$S(-2, m-2)$，$D(-2, 1)$，

所以 $|ST| = \sqrt{2}|SD| = \sqrt{2}[1-(m-2)] = \sqrt{2}(3-m)$，

因此 $\frac{|PQ|}{|ST|} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{5-m^2}{(3-m)^2}}$.

令 $t = 3 - m\ (1 \leqslant m < \sqrt{5})$，

则 $m = 3 - t,\ t \in (3-\sqrt{5}, 2]$，

所以 $\frac{|PQ|}{|ST|} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{5-(3-t)^2}{t^2}} = \frac{4}{5}\sqrt{-\frac{4}{t^2} + \frac{6}{t} - 1} = \frac{4}{5}\sqrt{-4(\frac{1}{t} - \frac{3}{4})^2 + \frac{5}{4}}$，

由于 $t \in (3-\sqrt{5}, 2]$，

所以 $\frac{1}{t} \in [\frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{4})$，

因此 当 $\frac{1}{t} = \frac{3}{4}$ 即 $t = \frac{4}{3}$ 时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，此时 $m = \frac{5}{3}$.

(2) 不妨设点 S 在 AB 边上，T 在 CD 边上，此时 $-1 \leqslant m \leqslant 1$，

因此 $|ST| = \sqrt{2}|AD| = 2\sqrt{2}$，此时 $\frac{|PQ|}{|ST|} = \frac{2}{5}\sqrt{5-m^2}$，

所以 当 $m = 0$ 时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) 不妨设点 S 在 AB 边上，T 在 BC 边上，$-\sqrt{5} < m \leqslant -1$，

由椭圆和矩形的对称性知 $\frac{|PQ|}{|ST|}$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，此时 $m = -\frac{5}{3}$.

综上所述 $m = \pm\frac{5}{3}$ 或 $m = 0$ 时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.