所以 $S_{\triangle AOB}=|m|\sqrt{\frac{2-m^2}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

解得 $m^2=\frac{3}{2}$或$m^2=\frac{1}{2}$. ①

又 $\overline{OP}=t\overline{OE}=\frac{1}{2}t(\overline{OA}+\overline{OB})=\frac{1}{2}t(2m,0)=(mt,0)$,

因为P为椭圆C上一点,

所以 $\frac{(mt)^2}{2}=1$. ②

由①②得 $t^2=4$或$t^2=\frac{4}{3}$,

又因为 $t>0$, 所以 $t=2$或$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)当A, B两点关于x轴不对称时,

设直线AB的方程为$y=kx+h$.

将其代人椭圆的方程$\frac{x^2}{2}+y^2=1$,

得 $(1+2k^2)x^2+4khx+2h^2-2=0$,

设$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

由判别式$\Delta>0$可得 $1+2k^2>h^2$,

此时 $x_1+x_2=-\frac{4kh}{1+2k^2}$, $x_1x_2=\frac{2h^2-2}{1+2k^2}$,

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2h=\frac{2h}{1+2k^2}$,

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{1+2k^2-h^2}}{1+2k^2}$.

因为点O到直线AB的距离$d=\frac{|h|}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|d$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{1+2k^2-h^2}}{1+2k^2}\frac{|h|}{\sqrt{1+k^2}}$

$=\sqrt{2}\frac{\sqrt{1+2k^2-h^2}}{1+2k^2}|h|$.

又 $S_{\triangle AOB}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

所以 $\sqrt{2}\frac{\sqrt{1+2k^2-h^2}}{1+2k^2}|h|=\frac{\sqrt{6}}{4}$. ③

—129—

令 $n=1+2k^2$, 代人③整理得 $3n^2-16h^2n+16h^4=0$,

解得 $n=4h^2$或$n=\frac{4}{3}h^2$,

即 $1+2k^2=4h^2$或$1+2k^2=\frac{4}{3}h^2$. ④

又 $\overline{OP}=t\overline{OE}=\frac{1}{2}t(\overline{OA}+\overline{OB})=\frac{1}{2}t(x_1+x_2,y_1+y_2)=(-\frac{2kht}{1+2k^2},\frac{ht}{1+2k^2})$,

因为P为椭圆C上一点,

所以 $t^2\left[\frac{1}{2}(-\frac{2kh}{1+2k^2})^2+(\frac{h}{1+2k^2})^2\right]=1$,

即 $\frac{h^2}{1+2k^2}t^2=1$. ⑤

将④代人⑤得 $t^2=4$或$t^2=\frac{4}{3}$,

又知 $t>0$,

故 $t=2$或$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

经检验, 适合题意.

综合(1)(2)得 $t=2$或$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

—130—

2013年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)

理科数学试题参考答案

一、选择题

(1)D (2)C (3)A (4)B (5)B (6)C

(7)A (8)D (9)A (10)B (11)D (12)B

二、填空题

(13)3 (14)$\frac{1}{3}$ (15)$\frac{7}{12}$ (16)①③④

三、解答题

(17)

解:(Ⅰ)由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

得 $b^2=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$,

又 $b=2$, $a+c=6$, $\cos B=\frac{7}{9}$,

所以 $ac=9$,

解得 $a=3$, $c=3$.

(Ⅱ)在$\triangle ABC$中, $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

由正弦定理得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $a=c$, 所以A为锐角.

所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{1}{3}$.

因此 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{10\sqrt{2}}{27}$.

(18)

(Ⅰ)证明: 因为 D,C,E,F分别是AQ,BQ,AP,BP的中点,

所以 $EF/\!/AB$, $DC/\!/AB$.

所以 $EF/\!/DC$.

又 $EF\not\subset$平面PCD, $DC\subset$平面PCD,

—131—

所以 $EF/\!/$平面PCD.

又 $EF\subset$平面EFQ, 平面$EFQ\cap$平面$PCD=GH$,

所以 $EF/\!/GH$.

又 $EF/\!/AB$,

所以 $AB/\!/GH$.

(Ⅱ)解法一: 在$\triangle ABQ$中, $AQ=2BD$, $AD=DQ$,

所以 $\angle ABQ=90°$, 即$AB\perp BQ$.

因为 $PB\perp$平面ABQ,

所以 $AB\perp PB$.

又 $BP\cap BQ=B$,

所以 $AB\perp$平面PBQ.

由(Ⅰ)知 $AB/\!/GH$,

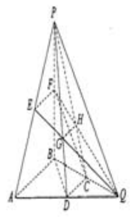
所以 $GH\perp$平面PBQ.

又 $FH\subset$平面PBQ,

所以 $GH\perp FH$.

同理可得 $GH\perp HC$,

所以 $\angle FHC$为二面角$D-GH-E$的平面角.



设$BA=BQ=BP=2$, 连接FC,

在$Rt\triangle FBC$中, 由勾股定理得 $FC=\sqrt{2}$,

在$Rt\triangle PBC$中, 由勾股定理得 $PC=\sqrt{5}$.

又 H为$\triangle PBQ$的重心,

所以 $HC=\frac{1}{3}PC=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

同理 $FH=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

在$\triangle FHC$中, 由余弦定理得 $\cos\angle FHC=\frac{\frac{5}{9}+\frac{5}{9}-2}{2\times\frac{5}{9}}=-\frac{4}{5}$.

即 二面角$D-GH-E$的余弦值为 $-\frac{4}{5}$.

—132—