

(ii) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

将 $y = kx + m$ 代入椭圆 E 的方程,

$$\text{可得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 16 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta > 0, \text{ 可得 } m^2 < 4 + 16k^2. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{则有 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 16}{1 + 4k^2}.$$

$$\text{所以 } |x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{16k^2 + 4 - m^2}}{1 + 4k^2}.$$

因为直线 $y = kx + m$ 与 y 轴交点的坐标为 $(0, m)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \triangle OAB \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2}|m||x_1 - x_2| \\ &= \frac{2\sqrt{16k^2 + 4 - m^2}|m|}{1 + 4k^2} \\ &= \frac{2\sqrt{(16k^2 + 4 - m^2)m^2}}{1 + 4k^2} \\ &= 2\sqrt{\left(4 - \frac{m^2}{1 + 4k^2}\right)\frac{m^2}{1 + 4k^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{设 } \frac{m^2}{1 + 4k^2} = t.$$

将 $y = kx + m$ 代入椭圆 C 的方程,

$$\text{可得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta \geq 0, \text{ 可得 } m^2 \leq 1 + 4k^2. \quad \textcircled{2}$$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 可知 $0 < t \leq 1$,

$$\text{因此 } S = 2\sqrt{(4-t)t} = 2\sqrt{-t^2 + 4t}.$$

$$\text{故 } S \leq 2\sqrt{3},$$

当且仅当 $t = 1$, 即 $m^2 = 1 + 4k^2$ 时取得最大值 $2\sqrt{3}$.

由 (i) 知, $\triangle ABQ$ 面积为 $3S$,

所以 $\triangle ABQ$ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}$.

(21)

解: (I) 由题意知 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + a(2x-1) = \frac{2ax^2 + ax - a + 1}{x+1}.$$

$$\text{令 } g(x) = 2ax^2 + ax - a + 1, \quad x \in (-1, +\infty).$$

(1) 当 $a = 0$ 时, $g(x) = 1$,

此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增, 无极值点;

(2) 当 $a > 0$ 时, $\Delta = a^2 - 8a(1-a) = a(9a-8)$.

① 当 $0 < a \leq \frac{8}{9}$ 时, $\Delta \leq 0, g(x) \geq 0$,

$f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增, 无极值点;

② 当 $a > \frac{8}{9}$ 时, $\Delta > 0$,

设方程 $2ax^2 + ax - a + 1 = 0$ 的两根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

$$\text{因为 } x_1 + x_2 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } x_1 < -\frac{1}{4}, \quad x_2 > -\frac{1}{4}.$$

$$\text{由 } g(-1) = 1 > 0, \text{ 可得 } -1 < x_1 < -\frac{1}{4}.$$

所以当 $x \in (-1, x_1)$ 时, $g(x) > 0, f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g(x) < 0, f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) > 0, f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

因此 函数有两个极值点.

(3) 当 $a < 0$ 时, $\Delta > 0$,

$$\text{由 } g(-1) = 1 > 0, \text{ 可得 } x_1 < -1.$$

当 $x \in (-1, x_2)$ 时, $g(x) > 0, f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) < 0, f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

所以 函数有一个极值点.

综上所述,

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个极值点;

当 $0 \leq a \leq \frac{8}{9}$ 时, 函数 $f(x)$ 无极值点;

当 $a > \frac{8}{9}$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个极值点.

(II) 由 (I) 知,

(1) 当 $0 \leq a \leq \frac{8}{9}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $f(0) = 0$,

所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 符合题意;

(2) 当 $\frac{8}{9} < a \leq 1$ 时, 由 $g(0) \geq 0$, 得 $x_2 \leq 0$,

所以 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f(0) = 0$, 所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 符合题意;

(3) 当 $a > 1$ 时, 由 $g(0) < 0$, 可得 $x_2 > 0$.

所以 $x \in (0, x_2)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减;

因为 $f(0) = 0$,

所以 $x \in (0, x_2)$ 时, $f(x) < 0$, 不合题意;

(4) 当 $a < 0$ 时, 设 $h(x) = x - \ln(x+1)$.

$$\text{因为 } x \in (0, +\infty) \text{ 时, } h'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因此 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h(x) > h(0) = 0$,

$$\text{即 } \ln(x+1) < x.$$

$$\text{可得 } f(x) < x + a(x^2 - x) = ax^2 + (1-a)x,$$

$$\text{当 } x > 1 - \frac{1}{a} \text{ 时, } ax^2 + (1-a)x < 0,$$

此时 $f(x) < 0$, 不合题意.

综上所述, a 的取值范围是 $[0, 1]$.

绝密★启用前

2015年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)

文科综合试题参考答案

第 I 卷

1. C	2. A	3. A	4. D	5. C	6. D	7. A
8. B	9. C	10. B	11. D	12. C	13. C	14. B
15. B	16. A	17. D	18. C	19. C	20. D	21. A
22. B	23. C	24. A	25. C	26. B	27. C	28. D
29. A	30. B	31. D	32. A	33. C	34. B	35. C

第 II 卷

36.

- (1) 地形以山地、平原为主;地势东高西低。
- (2) 地处大陆西岸,距海近;位于西风带,西风从海洋带来大量水汽;地处迎风坡,多地形雨;沿岸受寒流影响,水汽易凝结成雾。
- (3) 有利条件:夏季降水较多。
不利条件:夏季气温较高;冬季气温较低。
- (4) 提供工业原料;发展旅游;开展科学研究;改善环境。

37.

- (1) 高校多,具有技术和人才优势;政府政策支持,医药产业集聚;区内拥有航空港,高速公路贯穿,交通便捷;地处温带海洋性气候区,气候宜人,环境优美。
- (2) 交通更加便利,有利于加强两国间的区域联系;降低交通成本,扩大跨国贸易量,促进区域经济发展。
- (3) 赞成。理由是与现在大桥的位置相比,A 处位于海峡最窄处,工程量小,节约建设成本。
或答不赞成。理由是与现在大桥的位置相比,A 处两岸的城市规模小,交通需求量小。
(若有其他答案,言之有理,可酌情给分)

38.

- (1) 城市坊市界限被打破,瓦子等娱乐场所出现,商品经济发展到新水平;社会上出现了追求奢靡享乐、僭越礼制的现象。
面对社会生活对传统儒家伦理秩序的冲击,儒家学家把封建道德伦理上升到“理”的高度,提出了“存天理,灭人欲”等思想,以“理”来约束人们的行为,进而规范社会秩序。



携手百年名校 稳步锦绣前程

始于2001年

2000余名学生

100%被加拿大公立大学录取

57%进入世界500强大学

★ 山东大学直属中外合作办学项目

6月27日济南招生说明会 上午9:30 山东大学软件园校区办公楼三楼报告厅
6月28日青岛招生说明会 上午9:30 青岛国敦大酒店三楼百合厅

地址: 山东大学软件园校区办公楼309室 济南市高新技术开发区舜华路1500号

电话: 0531-88878319 88391818 88391808 网址: www.gsp.sdu.edu.cn

