



四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

在① $ac=\sqrt{3}$ ，② $c\sin A=3$ ，③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由。

问题：是否存在 $\triangle ABC$ ，它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ ， $C=\frac{\pi}{6}$ ，_____？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12分)

已知公比大于1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_4=20$ ， $a_3=8$ 。

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m)$ ($m\in\mathbb{N}^+$)中的项的个数，求数列 $\{b_m\}$ 的前100项和 S_{100} 。

19. (12分)

为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了100天空气中的PM2.5和SO₂浓度（单位： $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ），得下表：

PM2.5 \ SO ₂	[0,50]	(50,150]	(150,475]
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(1)估计事件“该市一天空气中PM2.5浓度不超过75，且SO₂浓度不超过150”的概率；

(2)根据所给数据，完成下面的2×2列联表：

PM2.5 \ SO ₂	[0,150]	(150,475]
[0,75]		
(75,115]		

(3)根据(2)中的列联表，判断是否有99%的把握认为该市一天空气中PM2.5浓度与SO₂浓度有关？

附： $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ， $\frac{P(K^2\geq k)}{k}$

0.050	0.010	0.001
3.841	6.635	10.828

数学试题第4页（共5页）

20. (12分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形， $PD\perp$ 底面 $ABCD$ 。设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l 。

(1)证明： $l\perp$ 平面 PDC ；

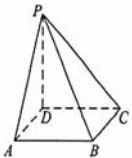
(2)已知 $PD=AD=1$ ， Q 为 l 上的点，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值。

21. (12分)

已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$ 。

(1)当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

(2)若 $f(x)\geq 1$ ，求 a 的取值范围。



22. (12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点 $A(2,1)$ 。

(1)求 C 的方程；

(2)点 M, N 在 C 上，且 $AM\perp AN$ ， $AD\perp MN$ ， D 为垂足。证明：存在定点 Q ，使得 $|DQ|$ 为定值。

数学试题第5页（共5页）

绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试
数学试题参考答案

一、选择题

1. C 2. D 3. C 4. B
5. C 6. B 7. A 8. D

二、选择题

9. ACD 10. BC 11. ABD 12. AC

三、填空题

13. $\frac{16}{3}$ 14. $3n^2-2n$ 15. $\frac{5\pi}{2}+4$ 16. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

四、解答题

17. 解：

方案一：选条件①。

由 $C=\frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$ 。

于是 $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，由此可得 $b=c$ 。

由① $ac=\sqrt{3}$ ，解得 $a=\sqrt{3}$ ， $b=c=1$ 。

因此，选条件①时问题中的三角形存在，此时 $c=1$ 。

方案二：选条件②。

由 $C=\frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$ 。

于是 $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，由此可得 $b=c$ ， $B=C=\frac{\pi}{6}$ ， $A=\frac{2\pi}{3}$ 。

数学试题参考答案第1页（共5页）

由② $c\sin A=3$ ，所以 $c=b=2\sqrt{3}$ ， $a=6$ 。

因此，选条件②时问题中的三角形存在，此时 $c=2\sqrt{3}$ 。

方案三：选条件③。

由 $C=\frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$ 。

于是 $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，由此可得 $b=c$ 。

由③ $c=\sqrt{3}b$ ，与 $b=c$ 矛盾。

因此，选条件③时问题中的三角形不存在。

18. 解：

(1)设 $\{a_n\}$ 的公比为 q 。由题设得 $a_1q+a_1q^3=20$ ， $a_1q^2=8$ 。

解得 $q=\frac{1}{2}$ （舍去）， $q=2$ 。由题设得 $a_1=2$ 。

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$ 。

(2)由题设及(1)知 $b_1=0$ ，且当 $2^m\leq m<2^{m+1}$ 时， $b_m=n$ 。

所以

$S_{100}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{63})+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{100})$

$=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times(100-63)$

$=480$ 。

19. 解：

(1)根据抽查数据，该市100天的空气中PM2.5浓度不超过75，且SO₂浓度不超过150的天数为32+18+6+8=64，因此，该市一天空气中PM2.5浓度不超过75，且SO₂浓度不超过150的概率的估计值为 $\frac{64}{100}=0.64$ 。

(2)根据抽查数据，可得2×2列联表：

PM2.5 \ SO ₂	[0,150]	(150,475]
[0,75]	64	16
(75,115]	10	10

数学试题参考答案第2页（共5页）

(3)根据(2)的列联表得

$K^2=\frac{100\times(64\times10-16\times10)^2}{80\times20\times74\times26}\approx 7.484$ 。

由于 $7.484>6.635$ ，故有99%的把握认为该市一天空气中PM2.5浓度与SO₂浓度有关。

20. 解：

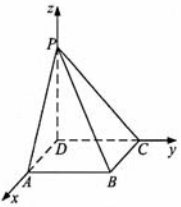
(1)因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$ ，所以 $PD\perp AD$ 。又底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $AD\perp DC$ ，因此 $AD\perp$ 平面 PDC 。

因为 $AD\parallel BC$ ， $AD\subset$ 平面 PBC ，所以 $AD\parallel$ 平面 PBC 。由已知得 $l\parallel AD$ 。

因此 $l\perp$ 平面 PDC 。

(2)以 D 为坐标原点， $\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系

$D-xyz$ 。则 $D(0,0,0)$ ， $C(0,1,0)$ ， $B(1,1,0)$ ， $P(0,0,1)$ ， $\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$ ， $\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$ 。



由(1)可设 $Q(a,0,1)$ ，则 $\overrightarrow{DQ}=(a,0,1)$ 。

设 $n=(x,y,z)$ 是平面 QCD 的法向量，则

$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{DQ}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{DC}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} ax+z=0, \\ y=0. \end{cases}$

可取 $n=(-1,0,a)$ 。

所以 $\cos\langle n,\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{n\cdot\overrightarrow{PB}}{|n|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{-1-a}{\sqrt{3}\sqrt{1+a^2}}$ 。

设 PB 与平面 QCD 所成角为 θ ，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}}$ 。

因为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}}\leq\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，当且仅当 $a=1$ 时等号成立，所以 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

数学试题参考答案第3页（共5页）

21. 解：

$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ， $f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$ 。

(1)当 $a=e$ 时， $f(x)=e^x-\ln x+1$ ， $f'(1)=e-1$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$ ，即 $y=(e-1)x+2$ 。

直线 $y=(e-1)x+2$ 在 x 轴， y 轴上的截距分别为 $-\frac{2}{e-1}$ ，2。

因此所求三角形的面积为 $\frac{2}{e-1}$ 。

(2)当 $0<a<1$ 时， $f(1)=a+\ln a<1$ 。

当 $a=1$ 时， $f(x)=e^{x-1}-\ln x$ ， $f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$ 。当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$ ；当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ 。所以当 $x=1$ 时， $f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(1)=1$ ，从而 $f(x)\geq 1$ 。

当 $a>1$ 时， $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geq e^{x-1}-\ln x\geq 1$ 。

综上， a 的取值范围是 $[1,+\infty)$ 。

22. 解：

(1)由题设得 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ ， $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$ ，解得 $a^2=6$ ， $b^2=3$ 。

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 。

(2)设 $M(x_1,y_1)$ ， $N(x_2,y_2)$ 。

若直线 MN 与 x 轴不垂直，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$ ，代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 得

$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$ 。

于是

$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$ ， $x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$ 。①

由 $AM\perp AN$ 知 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$ ，故 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$ ，可得

$(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$ 。

数学试题参考答案第4页（共5页）

山东省报考代码：E193

毕业生滕树云(书匀) 齐鲁电视台《每日新闻》主播

学院简介

山东传媒职业学院是经山东省人民政府批准成立、国家教育部备案的全日制普通高等专科学校，隶属于山东省广播电视局，与省教育厅共管，是省内一所国有公办的广播影视及大众传媒类普通高校，学院现有26个专业，面向全国16个省份招生。

学院坚持“依托传媒，服务传媒”的办学理念，大力实施人才培养模式改革，引领职业教育创新发展。在办学模式上突出“校媒融合”办学特色，按照“综合素质高，创新能力强，适应全媒体”的人才培养目标，在校内搭建包括报纸、广播电视台、网站、记者站、新媒体、实训中心在内的“六位一体”全真型全媒体校园教学平台，以项目为纽带，全面实施“不同专业、不同能力阶段、校内校外”相融通的“融通立交”培养模式。学生在校期间全面参与影视领域各类型各题材节目的策划、主持、制作、拍摄等环节，熟练掌握各类实践教学项目的操作流程，为高技能型人才的培养和输送提供有力保障。

学院设有专门的就业机构，连续几年就业率都保持在95%以上，居于全省领先水平。

播音教学

融媒体课堂

●通信地址：山东济南市经十东路8678号（章丘校区）
邮编：250200
山东济南市文化东路18号（文东校区）
邮编：250014

●学院网址：<http://www.sdcmc.net>

●招生办公室邮箱：E-mail:sdcmc2008@163.com

●咨询电话：0531-82940869、61326666、88592253

●学院招办官方QQ群：422547846